Peter Fischer pe.fischer@atn.nu

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung; homogene versus inhomogene Differentialgleichung; Störfunktion; partielle Lösung; Integrationskonstante; Anfangswertproblem bzw. Randwertproblem. Analytische und numerische Lösung

- Kurzzusammenfassung

  Zu Beginn wird die homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst; Dann wird die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Gestalt dy/dt + a(t).y(t) = 0 behandelt und für a(t) = t analytisch und numerisch gelöst. Schließlich werden für inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung numerische Lösungen gezeigt.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, alle Abteilungen, 4. Jahrgang

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen sind eine ausgezeichnete Beschreibungsmöglichkeit für kontinuierlich ablaufende vor allem zeitlich oder räumlich variierende Prozesse y(t) oder y(x). Zur Untermauerung führe ich ein berühmtes Zitat (über den Laplace'schen Dämon) an. Diese Intelligenz, der "Laplacesche Dämon", verkörpert den klassischen Standpunkt des Determinismus und begründet das daraus entstehende mechanistische Weltbild.

Eine Intelligenz, welche zu einem bestimmten Zeitpunkt alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitigen Lagen der sie bildenden Elemente kennte und über dies umfassend genug wäre, um diese Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen des größten Weltkörpers wie des leichtesten Atoms erfassen; nichts würde ihr ungewiß sein, und Zukunft und Vergangenheit wären ihrem Blick gegenwärtig. Es läßt sich eine Stufe der Naturerkenntnis denken, auf der sich der ganze Weltvorgang durch eine mathematische Formel darstellen ließe, durch ein System von **Differentialgleichungen**, aus dem sich Ort, Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit jedes Atoms im Weltall zu jeder Zeit ergäben.
Pierre Simon de Laplace (1814, Essai philosophique sur les probilités)

1. Die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wenn eine Größe y proportional zu ihrer differentiellen Änderung dy/dt mit einer bestimmten Größe t ist, so erhält man bereits eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung.

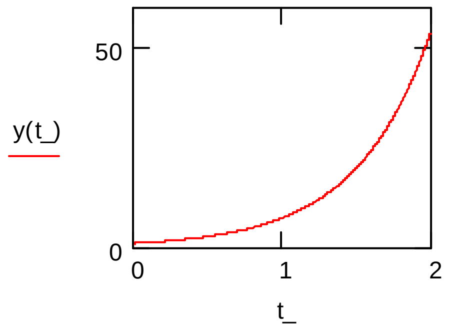
$k := 2$ Die Proportionalitätskonstante wird festgelegt.

$y0 := 1$ Die Anfangsgröße wird festgelegt. Handelt es sich um zeitlich variable Prozesse, so spricht man von Anfangswertproblemen; bei räumlich variablen gerne von Randwertproblemen.

$$y(t) = k \cdot \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)$$

Durch Trennung der Variablen (dy/y = kdt) und anschließende Integration erhält man die bekannte Funktion für exponentielles Wachstum (k > 0) oder exponentiellen Zerfall (k < 0).

$y(t) := y0 \cdot e^{k \cdot t}$



Nebenstehend erkennt man den graphischen Verlauf eines exponentiellen Wachstums mit der Wachstumskonstante k = 2.

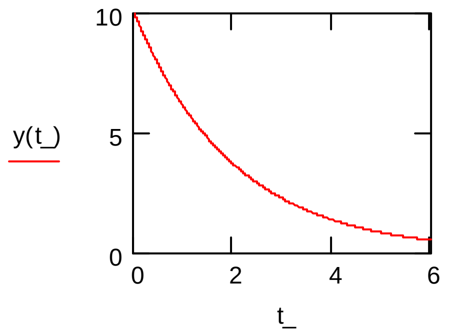
Wegen $e^2 = 7.389$

entspricht dies einer Zunahme von 638,9 Prozent pro Zeiteinheit.

$k := \frac{-1}{2}$ Bei einer negativen Wachstumskonstante ergibt sich ein exponentieller Abfall.

$y0 := 10$ Der Anfangswert ist mit 10 vorgegeben.

$y(t) := y0 \cdot e^{k \cdot t}$



Da die Halbwertszeit τ gemäß

$\tau := \left| \frac{\ln(2)}{k} \right|$

definiert ist, ergibt sich:

$\tau = 1.386$

Man erkennt im nebenstehenden Graphen nach 1,386 Zeiteinheiten jeweils einen Abfall auf die Hälfte des Wertes zur Zeit (t - 1.386).

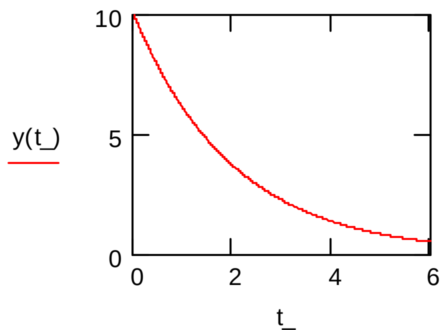
In Mathcad steht die **numerische** Lösung von Differentialgleichungen zur Verfügung, was hier zum Vergleich gezeigt wird.

Vorgabe

$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{-1}{2} \cdot y(t)$

$y(0) = 10$

$y := \text{Gdglösen}(t, 6)$



Die Übereinstimmung beider Graphen wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

Ist der multiplikative Ausdruck bei der Funktion y nicht mehr konstant, so erhält man für die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung folgende Gleichung:

$\frac{d}{dt} y(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$

Durch Trennung der Variablen erhält man:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -a(t) \cdot dt$$

$$a(t) := t$$

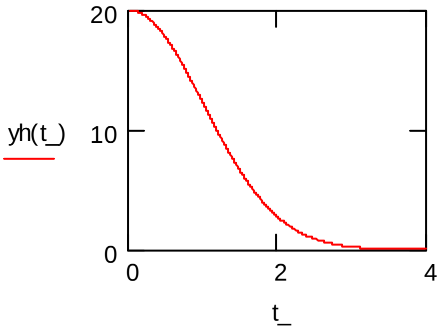
Durch Integration erhält man für die Lösung yh der homogenen Differentialgleichung:

$$yh(t) := C \cdot e^{-\int a(t)\,dt}$$

Die Konstante C berücksichtigt den Anfangswert yh(t0). Ist y eine Funktion von x, so spricht man auch vom Randwertproblem.

Für C = 20 erhält man folgende Funktion.

$$yh(t) := 20 \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$$



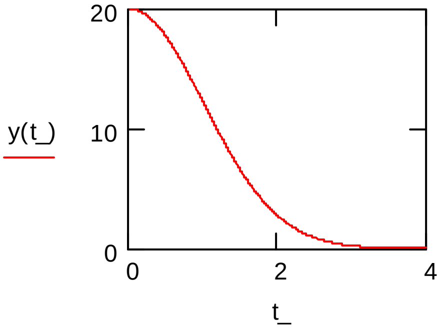
Auch für diese Differentialgleichung soll die numerische Lösung geliefert werden.

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}y(t) = -t \cdot y(t)$$

$$y(0) = 20$$

$$y := \text{Gdglösen}(t, 4)$$



Die Übereinstimmung beider Graphen wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

2. Die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) + a(t) \cdot y(t) = s(t)$$

heißt inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, falls

$s(t) \neq 0$ gilt.

Die Lösung setzt sich dann additiv aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h(t)$ und einer partikulären Lösung $y_p(t)$ zusammen. Die partikuläre Lösung findet man analytisch beispielsweise durch Variation der Konstanten C(t) in der homogenen Lösungsfunktion oder durch einen der Störfunktion angepassten Ansatz.

Als Beispiel für eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung betrachten wir eine homogene Kugel mit Radius r (Dichte ρ), welche in einer Flüssigkeit (der Dichte ρ_{Fl} und der Zähigkeit η) aus dem Ruhezustand frei fallen gelassen werde. Als Reibungskraft verwenden wir gemäß dem Stoke'schen Gesetz $F_R = 6\pi\eta rv$.

Um das Beispiel numerisch lösen zu können, wird ein Kugelradius von 4 Zentimeter, eine Dichte von 2600 Kilogramm pro Kubikmeter für eine Glaskugel bzw. von 1300 für die Flüssigkeit sowie eine Zähigkeit von 1,5 Pas (Glyzerin) angenommen.

$r := 0.04$

$\rho := 2600$

$\rho Fl := 1300$

$\eta := 1.5$

$$V := \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

$m := \rho \cdot V$

$g := 9.81$

Gemäß dem zweiten Newtonschen Axiom (mdv/dt = mg - $F_{Reibung}$ - $F_{Auftrieb}$) ergibt sich damit folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}v(t) + a \cdot v(t) = s$$

$$s := \frac{(\rho - \rho Fl) \cdot V \cdot g}{m}$$

$$a := 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \frac{r}{m}$$

Die Störfunktion s ist - wie die Schreibweise bereits symbolisiert - von der Zeit unabhängig. Daher ist auch die partikuläre Lösung vp eine kontstante Funktion, welche sich durch Einsetzen von vp in die inhomogene Differentialgleichung und Auflösen der entstehenden Gleichung als $v_p = s/a$ ergibt.

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Anfangswertbedingung v(0) = 0 zu -s/a. v(0) = 0 bedeutet eben, dass die Kugel zur Zeit t = 0 fallen gelassen wird. Die Gesamtlösung v(t) ergibt sich somit additiv aus $v_h(t)$ und $v_p(t)$ zu $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$.

$V = 0.000268$

$m = 0.697$

$a = 1.623$

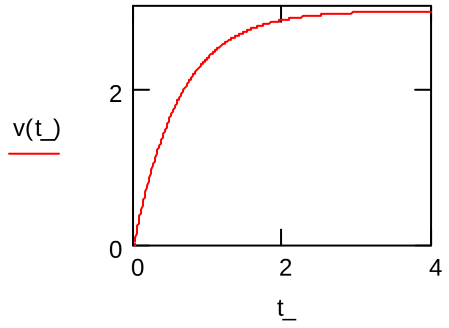
$s = 4.905$

$$v(t) := \frac{s}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$$

$$\frac{s}{a} = 3.023$$

Das ist die Lösung, welche der Anfangsbedingung v(0) = 0 genügt. Man erkennt, dass sich die Geschwindigkeit asymptotisch an den Wert s/a annähert.

t_ := 0, 0.01 .. 20



Zu welchem Zeitpunkt sind 90% bzw. 99% der asymptotischen Grenzgeschwindigkeit erreicht und wie groß ist diese? Wie sieht der Graph der durchfallenen Strecke aus und an welche Funktion nähert sich die Funktion s(t) an?

Bestimmung der asymptotischen Grenzgeschwindigkeit.

$$\lim_{t \to \infty} v(t) \to 3.022933333333333333333$$

Man erkennt die Bestätigung von s/a als asymptotische Grenzgschwindigkeit.

$$v(t) = 0.9 \cdot 3.023 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{gleit}, 2\end{array}\right. \to 1.4$$

Nach 1.4 Sekunden sind 90 % der asymptotischen Grenzgeschwindigkeit erreicht.

$$v(t) = 0.99 \cdot 3.023 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{gleit}, 2\end{array}\right. \to 2.8$$

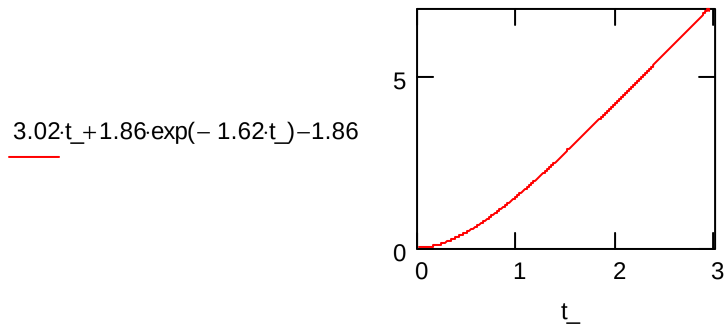
Nach 2.8 Sekunden sind 99 % der asymptotischen Grenzgeschwindigkeit erreicht.

Die durchfallene Strecke ergibt sich als Integral über die Geschwindigkeitsfunktion, wobei eine Anfangsstrecke s0 zu berücksichtigen ist..

s0 := −1.86

$$s(t) := \int v(t)\, dt + s0$$

$$s(t) \to 3.022933333333333333333 \cdot t + 1.8630226172839506172 \cdot \exp(-1.6225961538461538462 \cdot t) - 1.86$$



Man erkennt sowohl aus der Funktionsgleichung als auch aus dem Graph, dass sich die Funktion sehr rasch (nach 1.4 Sekunden sind bereits 90% der Endgeschwindigkeit und nach 2.8 Sekunden bereits 99% von dieser erreicht) an eine lineare Funktion mit der Gleichung s(t) = 3.02t anschmiegt. Diese ergibt sich aus der asymptotischen Grenzfallgeschwindigkeit von 3.02 m/s, bei welcher die Gewichts- sowie die Auftriebs- und die Stoke'sche Reibungskraft einander aufheben, und die Bewegung daher unbeschleunigt und daher mit konstanter Geschwindigkeit verläuft.

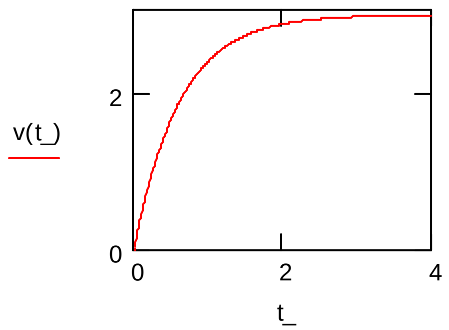
Auch hier wird zum Vergleich die numerische Lösung vorgestellt.

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}v(t) + a \cdot v(t) = s$$

$$v(0) = 0$$

$$v := \text{Gdglösen}(t, 4)$$



Die Übereinstimmung beider Graphen wird mit Freude zur Kenntnis genommen.

Nun ist es von Interesse, wie sich die eingehenden Parameter (Dichte der Kugel, Dichte des Mediums, Zähigkeit des Mediums sowie der Radius der Kugel) auf die Geschwindigkeitsfunktion und insbesondere auf die asymptotische Grenzgeschwindigkeit auswirken. Der Phantasie der SchülerInnen ist hierbei kaum eine Grenze gesetzt und sie werden aufgefordert, möglichst unterschiedliche Situationen zu erproben. Natürlich lohnt sich auch eine experimentelle Überprüfung, wobei sich als Medium sicherlich Wasser empfiehlt.

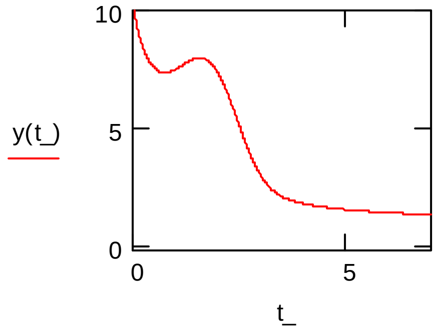
Zum Abschluss werden noch einige inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung numerisch gelöst.

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}y(t) = \left[\left(-t^2 + 2t - 1\right) \cdot y(t)\right] + t^2$$

$$y(0) = 10$$

$$y := \text{Gdglösen}(t, 7)$$

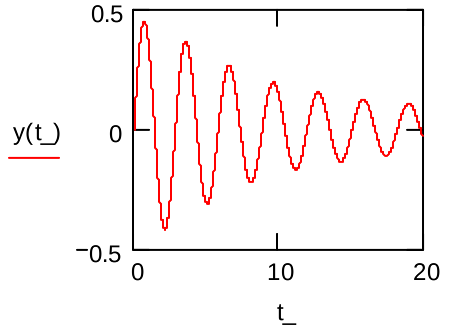


Vorgabe

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{-t}{2} \cdot y(t) + \cos(2t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y := \text{Gdglösen}(t, 20)$$



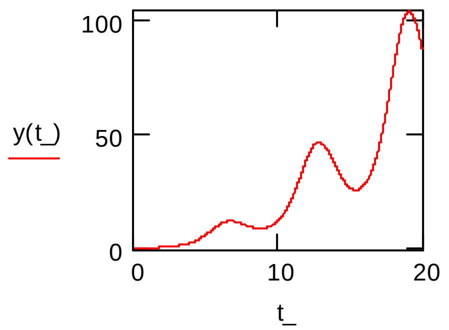
Sehr schön erkennt man die gedämpfte Schwingung.

Vorgabe

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{-\sin(t)}{2} \cdot y(t) + \frac{t}{3}$$

$$y(0) = 0$$

$$y := \text{Gdglösen}(t, 20)$$



Gut erkennt man das Anwachsen der Werte von y für größere Zeiten t, wofür die Inhomogenität t/3 - also die Störfunktion welche linear mit der Zeit wächst - sorgt.